

## Постановка задачи (рисунок 1).

Имеется токарный станок, который нужно проверить на точность.

Для этого в патрон станка зажимается контрольная оправка (скалка) - точно изготовленный цилиндр, диаметром  $D$  (показан черным цветом в верхнем положении и синим цветом в нижнем положении). Имеется ось симметрии скалки ("Ось цилиндра") - обозначена синим цветом.

На суппорт станка устанавливается стойка с индикатором часового типа, ножка которого скользит по контрольной оправке. Т. е. сам индикатор движется параллельно направляющим суппорта (параллельно вершине резца) и при этом производятся измерения отклонения поверхности скалки от траектории движения индикатора.

Траектория движения индикатора принята прямолинейной, на рисунке 1 эта линия обозначена как "Ось отсчета". По этой линии, также, перемещается вершина резца при обточке деталей и от этой линии (оси) будут производиться все измерения.

Фактическая ось вращения заготовки, она же ось шпинделя, ("Ось вращения") показана красным цветом (см. рисунок 1).

Ось вращения шпинделя станка не параллельна оси оправки и не параллельна оси отсчета (все три оси не параллельны в пространстве). При вращении контрольной оправки вокруг оси оправка бьет - занимает верхнее положение (показано черным цветом) и нижнее положение (показано зеленым цветом). Верхнее и нижнее положение оправки определяются по минимальному и максимальному показанию стрелки индикатора соответственно.

Имеются два сечения "0" и "L", в которых производятся измерения.

Вопрос - определить непараллельность оси вращения шпинделя относительно оси отсчета на длине  $L$  - разность размеров  $Y_L$  и  $Y_0$ .

# Математический аппарат расчета

Дано:

1. Ось  $OX$  - ось параллельная направляющим суппорта - ось отсчета (черная штрихпунктирная линия);
2. Ось вращения ось шпинделя (штрихпунктирная красная линия, не параллельна ни оси скалки, ни оси отсчета);
3. Плоскости измерений "0" и "L";
4. Сама скалка - идеальный цилиндр диаметром  $D$  (изображен черным цветом).
5. Точки пересечения цилиндра с плоскостями измерений -  $A, C, B, D$ .
6. Скалка в повернутом на  $180^\circ$  градусов положении (показана зеленым цветом) и точки пересечения плоскостей измерения "0" и "L" с ней.
7. Известны координаты точек  $A, B, C1, D$  в системе координат  $XOY$  (замерены в двух диаметрально противоположных положениях скалки).

Найти разность размеров  $Y_0$  и  $Y_L$ .

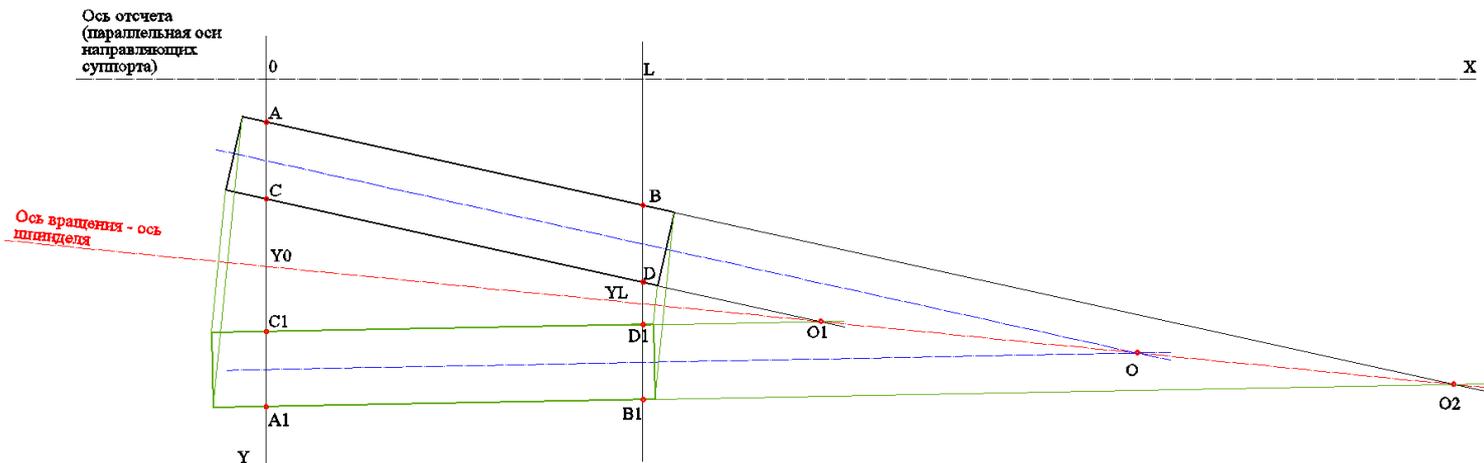


Рисунок 1.

## Алгоритм решения задачи:

1. Вращение скалки - идеального цилиндра происходит вокруг оси вращения (ось показана красным цветом). При продлении оси скалки (показана синим цветом) она пересечется с осью вращения в точке  $O$  - так, как ось скалки не параллельна оси вращения. При этом, при вращении скалки, точка  $O$  будет неподвижной относительно системы координат  $XOY$ .
2. Так, как скалка идеальный цилиндр, то все его образующие параллельны его оси, а следовательно при продлении соответствующих образующих, они так же пересекутся, причем точки их пересечения также будут лежать на оси вращения. Образующие  $CD$  и  $C1D1$  пересекутся в точке  $O1$ , образующие  $AB$  и  $A1B1$  - в точке  $O2$ .
3. Составляем уравнения образующих  $AB$  и  $A1B1$ , находим координаты точки пересечения  $O2$ .
4. Составляем уравнения образующих  $CD$  и  $C1D1$  и находим координаты точки пересечения  $O1$ :
  - 4.1. Вычитая абсциссы точек  $O2$  и  $O1$  - получаем длину, вычитая ординаты точек  $O2$  и  $O1$  получим отклонение от оси отсчета. В конечном итоге имеем отклонение оси вращения от оси отсчета на данной (вычисленной) длине. Приводим (составив пропорцию) это отклонение к длине  $L$  и - задача решена.



7. Находим координаты точки A1:

- угол "b" находим из прямоугольного треугольника D1C1H в котором известно:

$$D1H = L$$
$$\text{и } HC1 = Y(D1) - Y(C1)$$

тогда:

$$\text{tg}(b) = HC1 / HD1$$
$$b = \text{arctg}(HC1 / HD1)$$

$$b = \text{arctg}(Y(D1) - Y(C1) / L)$$

C1J - Диаметр скалки равен D, тогда расстояние C1A1 = C1J / cos(b) = D / cos(b)  
тогда Y(A1) = Y(C1) + C1A1 = Y(C1) + D / cos(b).

Координаты точки A1:

$$X(A1) = 0$$

$$Y(A1) = Y(C1) + D / \cos(b)$$

8. Аналогично координаты точки B1:

$$X(B1) = L$$

$$Y(B1) = Y(D1) + D / \cos(b)$$

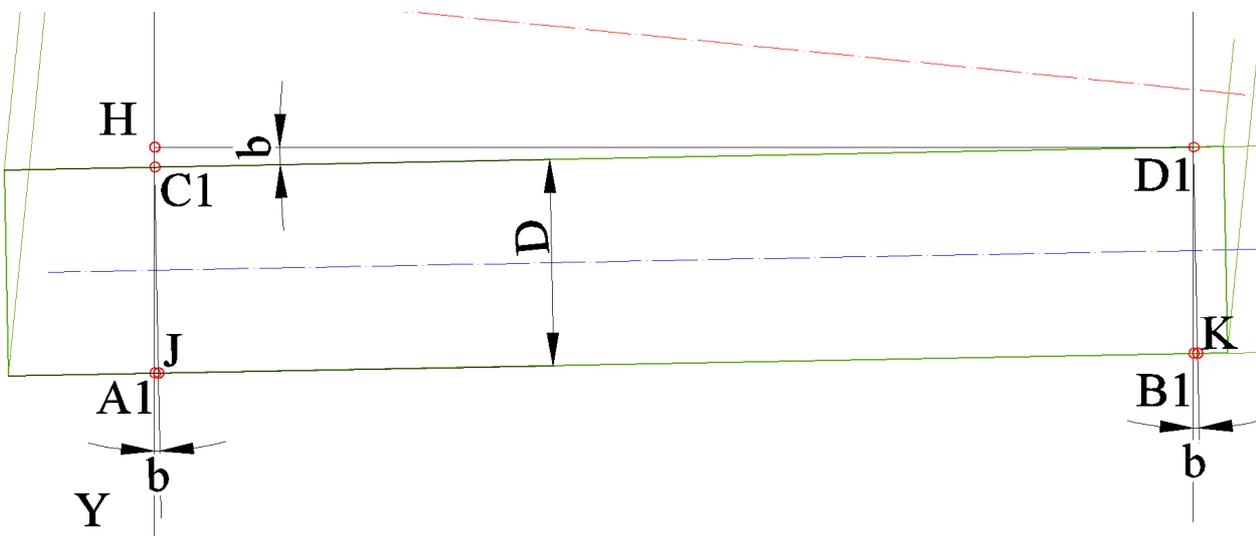


Рисунок 3

# Проверка

Проверка осуществлена путем вычерчивания схемы с реальными размерами в конструкторской программе с простановкой размеров и дальнейшим определением координат точек расчетным путем. Сравнивая полученные результаты можно судить о применимости метода.

## Проверка математического метода

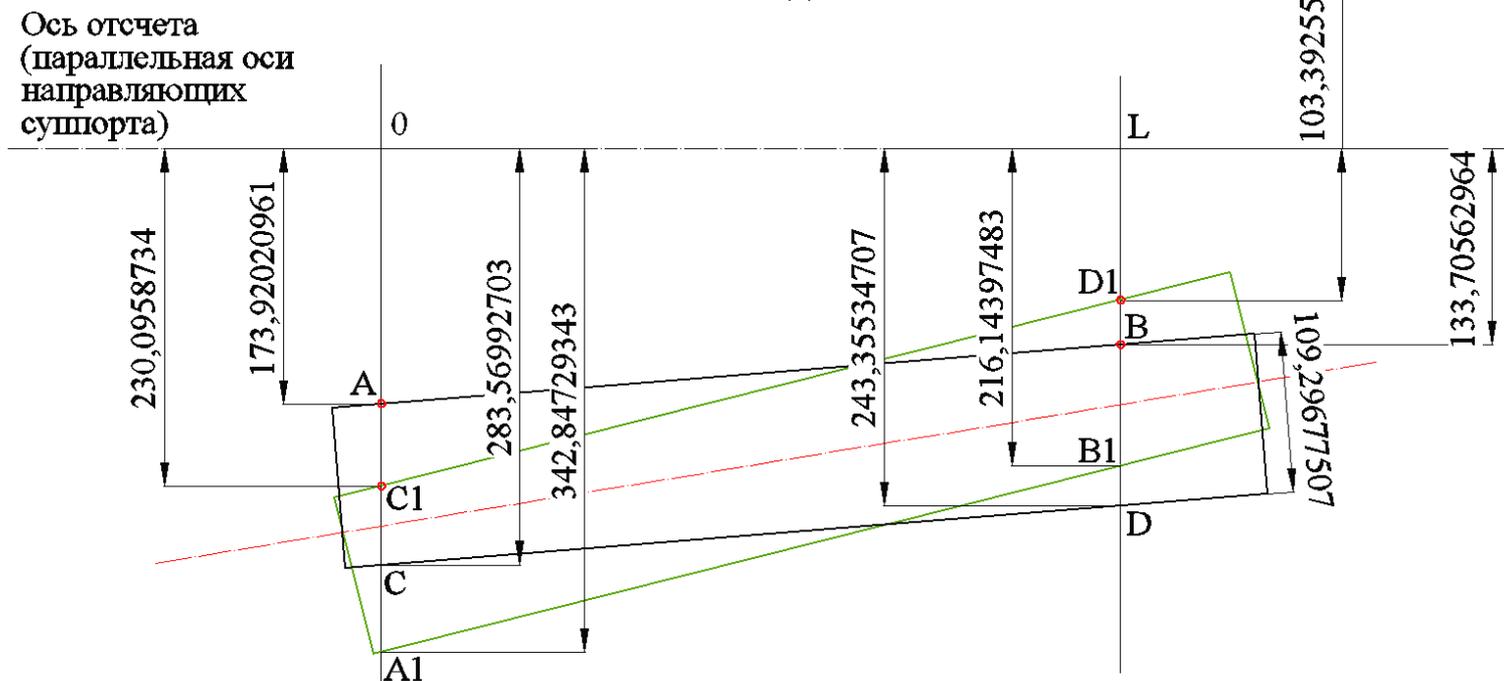


Рисунок 4

" " - исходные данные.

Точка	Координаты полученные из Автокад, мм		Координаты вычисленные, мм		Разность - Вычисленные - Автокад (по Y), мм
	X	Y	X	Y	
A	0	173,92020961	0	173,92020961	0
B	500	133,70562964	500	133,70562964	0
C	0,0	283,56992703	0,0	283,5699270264125	-0,000000004
D	500,0	243,35534707	500,0	243,35534705641248	-0,000000014
A1	0,0	342,84729343	0,0	342,8472934195561	-0,000000001
B1	500,0	216,14397483	500,0	216,14397482955607	-0,000000000
C1	0	230,0958734	0	230,0958734	0
D1	500	103,39255481	500	103,39255481	0

## Продолжение

Составляем уравнения образующих АВ и А1В1, находим координаты точки пересечения О2 (см рис. 1).

Уравнение прямой в отрезках:

$$(X - X1) / (X2 - X1) = (Y - Y1) / (Y2 - Y1)$$

В нашем случае:

$$X1 = 0$$

$$X2 = L$$

Тогда:

$$(X - 0) / (L - 0) = (Y - Y1) / (Y2 - Y1)$$

$$X / L = (Y - Y1) / (Y2 - Y1)$$

$$X * (Y2 - Y1) = L * (Y - Y1)$$

$$X * Y2 - X * Y1 = L * Y - L * Y1$$

$$L * Y - L * Y1 = X * Y2 - X * Y1$$

$$L * Y = X * Y2 - X * Y1 + L * Y1$$

$$Y = (X * Y2 - X * Y1 + L * Y1) / L$$

$$Y = Y1 + X * (Y2 - Y1) / L$$

Уравнение прямой АВ:

$$Y = YA + X * (YB - YA) / L$$

Уравнение прямой А1В1

$$Y = YA1 + X * (YB1 - YA1) / L$$

Находим абсциссу координаты пересечения прямых АВ и А1В1 (точки О2):

$$YA + X * (YB - YA) / L = YA1 + X * (YB1 - YA1) / L$$

$$X * (YB - YA) / L - X * (YB1 - YA1) / L = YA1 - YA$$

$$X * (YB - YA) - X * (YB1 - YA1) = (YA1 - YA) * L$$

$$X * (YB - YA - YB1 + YA1) = (YA1 - YA) * L$$

$$X = (YA1 - YA) * L / (YB - YA - YB1 + YA1)$$

$$Y = YA + ((YA1 - YA) * L / (YB - YA - YB1 + YA1)) * (YB - YA) / L$$

Находим координаты точки пересечения прямых

Составляем уравнения образующих CD и C1D1, находим координаты точки пересечения О1 (см рис. 1).

$$X = (YC1 - YC) * L / (YD - YC - YD1 + YC1)$$

$$Y = YC + ((YC1 - YC) * L / (YD - YC - YD1 + YC1)) * (YD - YC) / L$$

## Проверка

Проверяются размеры полученные в конструкторской программе и полученные путем вычислений по вышеприведенным формулам

Точка		Координаты полученные из Автокад, мм	Координаты вычисленные, мм	Разность - Вычисленные - Автокад, мм
О2	X	1575,22532181	1575,2253219203664	0,000000110
	Y	407,52253218	407,52253219203664	0,000000012
О1	X	735,84832161	735,8483216213882	0,000000011
	Y	323,58483216	323,58483216595572	0,000000006

Составляем уравнение оси вращения проходящей через точки O1 и O2:

O1 (XO1, YO1)

O2 (XO2, YO2)

Из  $(X - X1) / (X2 - X1) = (Y - Y1) / (Y2 - Y1)$  получим

$$(X - XO1) / (XO2 - XO1) = (Y - YO1) / (YO2 - YO1)$$

$$(X - XO1) * (YO2 - YO1) = (Y - YO1) * (XO2 - XO1)$$

$$(Y - YO1) * (XO2 - XO1) = (X - XO1) * (YO2 - YO1)$$

$$(Y - YO1) = (X - XO1) * (YO2 - YO1) / (XO2 - XO1)$$

## Полученное уравнение оси шпинделя

$$Y = (X - XO1) * (YO2 - YO1) / (XO2 - XO1) + YO1.$$

## Проверка

Находим отклонение оси вращения шпинделя по пункту 4.1:

$$X(O2) - X(O1) = 1575,22532181 - 735,84832161 = 839,377000200$$

$$Y(O2) - Y(O1) = 407,52253218 - 323,58483216 = 83,937700020$$

пересчитаем для длины 500 мм, составив пропорцию

$$839,377000200 \quad - \quad 83,937700020$$

$$500 \quad - \quad X$$

$$X = 500 * 83,937700020 / 839,377000200 = 50,000000000$$

$$X = 50,000000000 \text{ (мм)}$$

Находим отклонение оси вращения шпинделя по пункту 4.2

В уравнение оси шпинделя  $Y = (X - XO1) * (YO2 - YO1) / (XO2 - XO1) + YO1$

$$\text{Подставляем значение } X=0 \text{ и получаем } Y(0) = (0 - 735,84832161) * (407,52253218 - 323,58483216) / (1575,22532181 - 735,84832161) + 323,58483216 = -61765,415679521 / 839,377000200 + 323,58483216 = 249,999999999$$

$$\text{Подставляем } X=500 \text{ и получаем } Y(500) = (500 - 735,84832161) * (407,52253218 - 323,58483216) / (1575,22532181 - 735,84832161) + 323,58483216 = -23,584832161 + 323,58483216 = 299,999999999.$$

Отклонение оси вращения шпинделя на длине L:

$$299,999999999 - 249,999999999 = 50,000000000 \text{ (мм)}.$$

Как видим, результаты расчетов по п. 4.1 и 4.2 полностью совпадают.